Domácí úkol ze cvičení 11.
(prosím, přečtěte si všechny příklady a vyřešte aspoň dva z nich)

Opakování „základních" pojmů (zvláště diferenciálu) :

1. Ukažte, že pro malá x, y platí $arctg\dfrac{x+y}{1+xy} \cong x+y$.

2. Je dána funkce f : $f(x,y)=(x^2+y^2).\sin(\dfrac{1}{x^2+y^2})$ pro $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0)=0$.

   a) Ukažte, že funkce f je spojitá v R^2 .
   b) Vypočítejte $\nabla f(0,0)$;
   c) Ukažte, že funkce f je v bodě (0,0) diferencovatelná, i když nemá bodě (0,0) spojité parciální derivace.

3. a) Ukažte (spíše zopakujte), že je-li funkce diferencovatelná v bodě $X_0 \in R^n$, pak má pro libovolný vektor $\vec{a} \in R^n, \vec{a} \neq \vec{o}$ derivaci ve směru $\vec{a}$ $D_{\vec{a}}f(X_0)=\langle \nabla f(X_0), \vec{a} \rangle$.

   b) Zjistěte, zda funkce $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ je v bodě $(1,1)$ ve směru vektoru $\vec{a}=(2,1)$ rostoucí nebo klesající. Najděte vektor $\vec{a}$, $\|\vec{a}\|=1$, v jehož směru funkce f v bodě $(1,1)$ roste nejrychleji.

Derivace složené funkce více proměnných

1. Derivace složené funkce více proměnných: „technika derivování – předpokládáme, že platí předpoklady pro užití „řetízkového" pravidla - jaké to jsou předpoklady?
   (Pokuste se aspoň dva příklady „sepsat" a zjistit, co „nejde"- případné nejasnosti probereme na cvičení.)
   a) Je-li $g(t)=f(\sin t, t^2)$, určete $g'(t)$ a $g''(t)$.
   b) Určete $g'(x)$ a $g''(x)$, je-li $g(x)=F(x,\varphi(x))$.
   c) Určete parciální derivace 1.řádu a některou parciální derivaci 2. řádu funkce g , je-li

      (i) $g(x,y)=f(x^2y,\dfrac{x}{y})$; (ii) $g(x,y)=f(x^2+y^2,xy,\dfrac{y}{x})$; (iii) $g(x,y,z)=f(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z})$.

   d) Určete parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $g(x,y)=F(x,y,\varphi(x,y))$.

2*. Transformujte diferenciální operátor $x\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}-y\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}$ do polárních souřadnic
   ($x=r\cos\varphi, x=r\sin\varphi$, $r \in (0,\infty)$, $\varphi \in [0,2\pi]$) .
   (úloha pro ty, co by chtěli vyřešit rovnici $x\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}-y\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$)